

Etude de stabilité linéaire de l'écoulement à deux couches de films non-newtoniens sur un plan incliné

Millet Séverine, Rousset François, Botton Valéry & Ben Hadid Hamda

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique - UMR CNRS 5509

INSA -Lyon / Université Lyon 1 / Ecole Centrale de Lyon

severine.millet@insa-lyon.fr

Résumé :

Il s'agit d'une analyse temporelle de stabilité linéaire de l'écoulement stratifié de films sur un plan incliné. Nous nous sommes intéressés au cas de deux couches non miscibles de fluides non-newtoniens. La rhéologie des fluides étudiés est décrite par la loi de Carreau, selon laquelle une augmentation du taux de cisaillement dans l'écoulement génère une diminution locale de la viscosité du fluide. Une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev a été employée pour la discrétisation de l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée, résolue sous forme d'un problème aux valeurs propres. Les effets de la stratification en densité ont été étudiés dans le cas où la couche inférieure est la moins visqueuse. Cette situation est favorable à l'apparition des instabilités interfaciales. Nous avons pu mettre en évidence l'existence d'un rapport de densité seuil à partir duquel on observe un basculement d'une instabilité de grande longueur d'onde à une instabilité de longueur d'onde modérée. L'influence des propriétés rhéofluidifiantes des fluides sur la position de ce seuil a été également étudiée.

Abstract:

This study is a temporal linear stability analysis of a multilayered film flow driven by gravity down an inclined plane. We were interested in the case of two layers of nonmiscible non-Newtonian fluids. The rheological behaviour of the considered fluids is described by Carreau law, according to which an increase in the shear rate in the flow locally generates a viscosity reduction of the fluid. A spectral collocation method based on Chebyshev polynomials was used for the discretization of generalized Orr-Sommerfeld eigenvalues problem. The effects of the stratification in density were studied in the case where a less viscous layer is adjacent to the wall. This situation is favourable to the appearance of interfacial instabilities. We highlighted the existence of a threshold of density ratio from which is observed a change in the instability characteristics from a long wavelength instability to a moderate wavelength instability. We also investigated the influence of the shear-thinning properties of the fluids on the position of this threshold.

Mots-clefs :

Loi de Carreau ; films multicouches ; instabilités

1 Introduction

L'étude de la stabilité des écoulements de films multicouches sur un plan incliné concerne un grand nombre d'applications. Parmi celles-ci nous pouvons citer, dans le domaine industriel, les opérations de couchage et dans le domaine environnemental, les écoulements de glaciers, laves, boues en suspension ou même les écoulements granulaires. Cependant, le comportement rhéologique de la plupart de ces fluides nécessite l'application d'une loi non-linéaire entre l'effort et la contrainte de cisaillement dans le fluide et ne peut donc pas être correctement décrit par un modèle newtonien.

L'écoulement de films de fluides newtoniens le long d'un plan incliné a été largement étudié ces dernières décennies. Les travaux dans ce domaine ont montré que ces écoulements peuvent être le siège d'instabilités interfaciales. La nécessité de la présence d'inertie pour le déclenchement de ces instabilités a été mis en évidence par Benjamin (1957) et Yih (1963) pour les écoulements à une seule couche, par Yih (1967) et Chen (1995) pour les écoulements de type Poiseuille ou Couette à deux couches confinées entre deux plans et par Hooper *et al.* (1987) pour le cas où la couche supérieure est de dimension infinie. Loewenherz *et al.* (1989), Chen (1993) et Hu *et al.* (2006) se sont intéressés à la stabilité linéaire d'écoulements de films à deux couches avec une surface libre. Ces auteurs ont montré que lorsque la couche supérieure est plus visqueuse que la couche inférieure l'écoulement est instable même en l'absence d'inertie. Les instabilités qui se

développent au sein de tels écoulements trouvent leur origine au niveau de l'interface, et présentent deux longueurs d'onde distinctes : une grande longueur d'onde toujours instable et une longueur d'onde modérée (de l'ordre de l'épaisseur des couches) dont la stabilité dépend fortement des paramètres de l'écoulement, notamment le rapport d'épaisseur entre les couches ou la tension de surface. Ces deux longueurs d'onde sont certainement associées à des mécanismes physiques différents en raison de leur évolution indépendante en fonction des paramètres de l'écoulement. En effet, la longueur d'onde la plus instable change suivant la valeur des paramètres de l'écoulement. Dans la configuration opposée, lorsque la couche inférieure est la plus visqueuse, aucune instabilité ne se développe en l'absence d'inertie. Ces travaux montrent ainsi que, même si elle n'en est pas le siège, la surface libre joue un rôle essentiel dans ce processus de déstabilisation. Dans le cas particulier sans inertie, Hu *et al.* (2006) ont identifié un seuil en termes de rapport de densité entre les couches sous lequel l'instabilité de longueur d'onde modérée disparaît quel que soit le rapport de viscosité. Jiang *et al.* (2004) ont réalisé un bilan d'énergie pour expliquer les différences observées concernant la stabilité des écoulements à deux couches selon que l'écoulement est confiné ou non, et selon la stratification de viscosité. Les auteurs ont également montré que le travail de l'effort de cisaillement au niveau de la surface libre joue un rôle crucial dans le changement de la stabilité du système.

En comparaison du nombre élevé de travaux relatifs à l'écoulement de fluides newtoniens sur un plan incliné, relativement peu de travaux ont porté sur les écoulements de films non-newtoniens. Weinstein (1990) a réalisé une étude numérique concernant l'influence de l'équation constitutive de Carreau sur la stabilité spatiale d'un écoulement de films multicouches sur un plan incliné. Balmforth *et al.* (2003) ont exploré la stabilité linéaire de l'écoulement sur un plan incliné de deux couches de fluides dont la rhéologie suit une loi puissance et ont élargi leur étude au cas faiblement non linéaire. Cependant le modèle en loi puissance se révèle non adapté au cas où la couche supérieure est non-newtonienne en raison du fait que la viscosité devient infinie au niveau de la surface libre. Rousset *et al.* (2007) ont étudié la stabilité temporelle d'un écoulement de fluide de Carreau sur un plan incliné. Le nombre de Reynolds critique qu'ils ont obtenu pour les fluides rhéofluidifiants est inférieur à celui des fluides newtoniens, à l'inverse la célérité des ondes dans les fluides rhéofluidifiants est supérieure. Une attention particulière est prêtée aux petits angles d'inclinaison pour lesquels des modes de surface comme des modes de cisaillement peuvent apparaître. Les auteurs ont également mis en évidence l'influence des propriétés rhéofluidifiantes des fluides dans la définition du type d'instabilité.

Dans cette étude nous analysons la stabilité linéaire d'un écoulement de deux films non-newtoniens superposés généré par gravité le long d'un plan incliné. Nous concentrons notre étude sur les fluides rhéofluidifiants (la viscosité diminue localement quand le taux de cisaillement augmente) obéissant au modèle non élastique de Carreau à quatre paramètres (Carreau *et al.* (1979)). De tels fluides correspondent, par exemple, aux suspensions de boue, à de la peinture ou à des polymères en solution. Il prévoit une région pour des taux de cisaillement modérés dans laquelle le fluide suit un comportement en loi puissance. Cependant, à la différence du modèle de loi puissance, il prévoit une viscosité qui reste finie et constante quand le taux de cisaillement tend vers zéro. Cette propriété rend la loi de Carreau particulièrement adaptée à l'étude d'écoulements à surface libre.

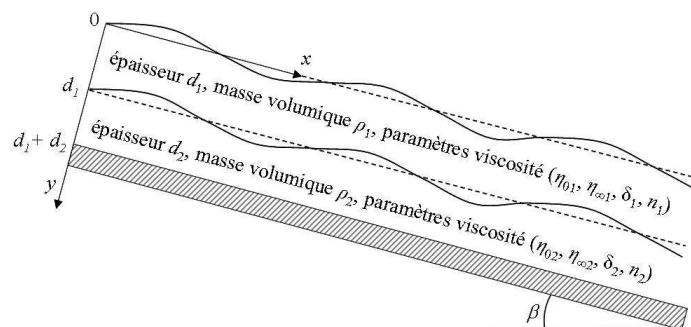


FIG. 1 – Schéma de la configuration d'étude

2 Formulation du problème

La configuration de l'étude est présentée sur la figure 1. L'indice $k=1,2$ utilisé par la suite désigne respectivement la couche du haut et du bas. Le débit par unité de largeur du plan incliné est dans chaque couche noté Q_k et le débit total noté Q_T . Les équations régissant ce problème sont les équations de continuité et de Navier - Stokes. Elles s'écrivent :

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0 \text{ pour } k = 1, 2 \quad (1)$$

$$\rho_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_k}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xxk}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xyk}}{\partial y} \right) + \rho_k g \sin \beta \text{ pour } k = 1, 2 \quad (2)$$

$$\rho_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial v_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_k}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xyk}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yyk}}{\partial y} \right) + \rho_k g \cos \beta \text{ pour } k = 1, 2 \quad (3)$$

où u_k and v_k sont les composantes de vitesses selon les directions x and y respectivement, p_k est la pression, et τ_{ijk} est la composante (i,j) du tenseur de contraintes dans la couche k . Les fluides sont supposés purement visqueux, ce qui signifie que leur viscosité η_k dépend uniquement du taux du cisaillement local $\dot{\gamma}_k = du_k / dy$. Ils suivent la loi de Carreau à quatre paramètres qui s'écrit :

$$\frac{\eta_k - \eta_{\infty k}}{\eta_{0k} - \eta_{\infty k}} = \left[1 + (\delta_k |\dot{\gamma}_k|)^2 \right]^{\frac{n_k - 1}{2}}, \quad (4)$$

avec η_{0k} la viscosité newtonienne de la couche k à faible taux de cisaillement, $\eta_{\infty k}$ la limite inférieure de la viscosité obtenue à taux de cisaillement infini, δ_k un temps caractéristique du fluide et n_k un paramètre sans dimension. Le fluide a un comportement quasi-newtonien à faible et fort taux de cisaillement et ces comportements asymptotiques sont joints par un comportement type loi puissance. La représentation logarithmique de la viscosité en fonction du taux de cisaillement présentée sur la figure 2 donne une meilleure idée de ce comportement rhéologique.

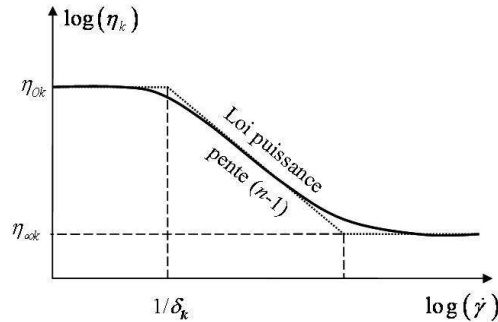


FIG. 2 – Viscosité en fonction du taux de cisaillement avec une loi de Carreau

Ce modèle de Carreau peut être perçu comme une amélioration de la loi puissance classique qui ne présenterait pas cette viscosité finie à bas taux de cisaillement. Dans le cadre du modèle de Carreau, un fluide est newtonien lorsque $n_k=1$ ou $\delta_k=0$, et rhéofluidifiant lorsque $0 < n_k < 1$ et $\delta_k > 0$.

Les rapports de densité et viscosité newtonienne sont définis comme $M_k = \rho_k / \rho_2$ et $E_k = \eta_{0k} / \eta_{02}$. Contrairement au cas newtonien, pour un fluide dont la viscosité suit une loi de Carreau, il n'est plus possible d'obtenir une relation entre l'épaisseur des couches et le débit. A l'instar de Weinstein (1990), nous choisissons pour longueur caractéristique :

$$d_s = \left(\frac{\eta_{02} Q_T}{\rho_2 g \sin \beta} \right)^{1/3}$$

dont est déduite la vitesse caractéristique Q_T / d_s . En utilisant ces grandeurs de référence, le nombre de Reynolds Re et le nombre capillaire Ca_k apparaissent dans les équations du problème :

$$Re = \frac{\rho_2 Q_T}{\eta_{02}}, Ca_k = \frac{\eta_{02} Q_T}{\sigma_k d_s}, \text{ où } \sigma_k \text{ est la tension de surface au dessus de la couche } k.$$

Les paramètres sans dimension en relation avec la loi de Carreau sont dans cette étude n_k et $L_k = \delta Q_T / d_s^2$. En appliquant la décomposition de Reynolds les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$(u_k, v_k, p_k) = (U_k(y), 0, P_k) + (u'_k(x, y, t), v'_k(x, y, t), p'_k(x, y, t)), \quad (5)$$

où $U_k(y)$ est le champ de base et $u'_k(x, y, t)$, $v'_k(x, y, t)$ et $p'_k(x, y, t)$ le champ des perturbations.

La perturbation est considérée comme une onde plane:

$$(u'_k, v'_k, p'_k)(x, y, t) = (\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{p}_k)(y) e^{i\alpha(x-ct)}$$

où α est le nombre d'onde et $c = c_R + i c_I$ la vitesse complexe, avec c_R la vitesse de phase et αc_I le taux de croissance temporel de la perturbation. Notons que la stabilité de l'écoulement est déterminée par la valeur de c_I : l'écoulement est respectivement stable, instable ou neutre selon que c_I est négatif, positif ou nul.

Le système d'équations (1)-(3) est discrétisé à l'aide de la méthode spectrale Tau basée sur les polynômes de Chebyshev et les points de collocation de Gauss Lobatto. Le système d'équations résultant se ramène à un problème aux valeurs propres qui s'écrit sous la forme:

$$[A] \hat{v} = c [B] \hat{v}$$

où \hat{v} est le vecteur propre obtenu pour chaque mode et contenant les valeurs algébriques des perturbations dans les deux couches aux points de collocation.

3 Résultats

Nous considérons dans cette étude le cas où la couche supérieure est à la fois plus visqueuse et moins dense que la couche inférieure ($E_I > 1$ et $M_I < 1$). L'influence des propriétés rhéofluidifiantes des fluides de Carreau sur ces instabilités est étudiée à travers les paramètres L_k et n_k . L'évolution du taux d'amplification αc_I en fonction du nombre d'onde α pour différentes valeurs du rapport de densité M_I est donnée sur les figures 3(a), 3(b) et 3(c).

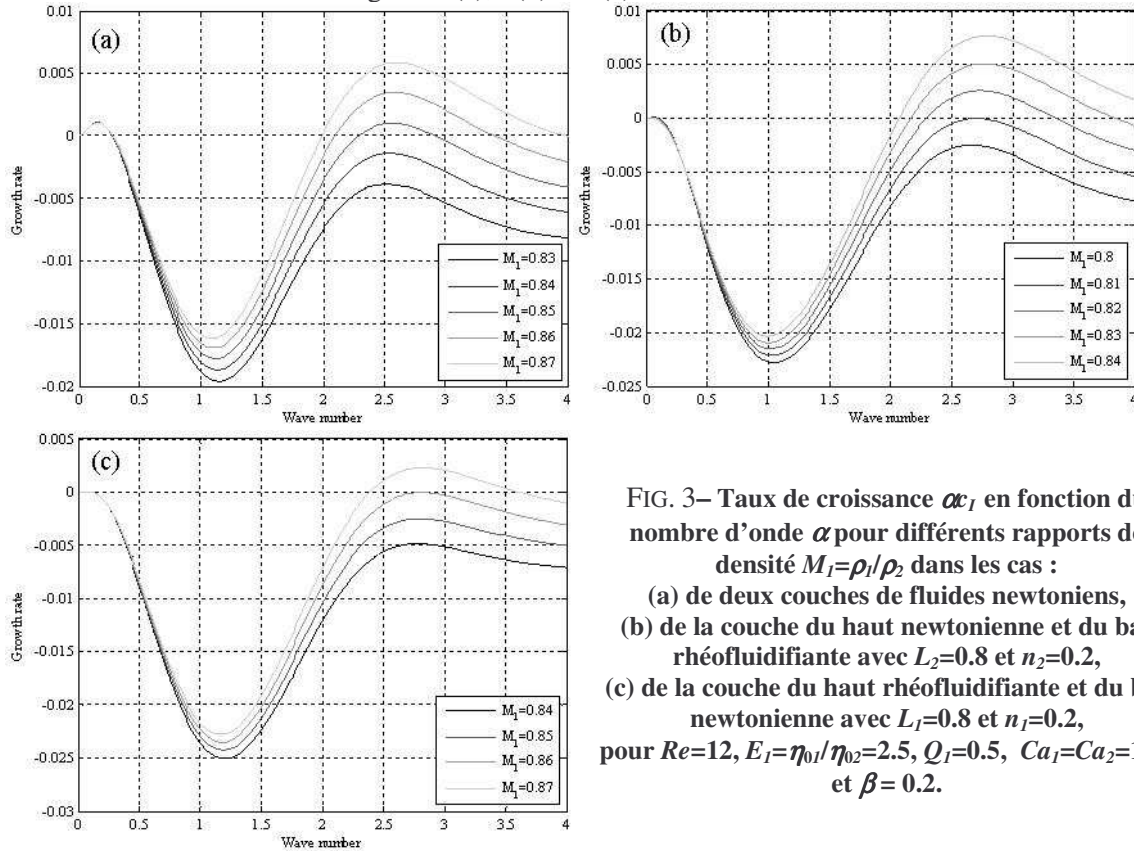


FIG. 3– Taux de croissance αc_I en fonction du nombre d'onde α pour différents rapports de densité $M_I = \rho_1 / \rho_2$ dans les cas :
 (a) de deux couches de fluides newtoniens,
 (b) de la couche du haut newtonienne et du bas rhéofluidifiante avec $L_2=0.8$ et $n_2=0.2$,
 (c) de la couche du haut rhéofluidifiante et du bas newtonienne avec $L_1=0.8$ et $n_1=0.2$,
 pour $Re=12$, $E_I=\eta_{01}/\eta_{02}=2.5$, $Q_I=0.5$, $Ca_1=Ca_2=10^{10}$ et $\beta=0.2$.

Les résultats de la figure 3(a) concernent le cas de deux couches newtoniennes. Sur la figure on note la présence de deux instabilités, une de grande longueur d'onde, toujours instable, et l'autre

de longueur d'onde modérée. Ces résultats sont conformes à ceux de la littérature et sont en bon accord quantitatif avec ceux de Hu *et al.* (2006) obtenus pour de faibles nombres de Reynolds. On observe également sur la figure qu'à mesure que le rapport de densité M_I augmente, le taux d'amplification de la longueur d'onde modérée augmente alors que celui de la grande longueur d'onde reste inchangé. Au-delà d'une certaine valeur limite $M_I > 0.855$, l'instabilité relative à la longueur d'onde modérée devient la plus instable. La figure 3(b) (respectivement 3(c)) correspond au cas où la couche supérieure (inférieure) reste newtonienne et l'autre couche suit une loi de Carreau. Sur ces figures les courbes illustrent globalement le même type d'évolution de l'instabilité de longueur d'onde modérée que celui déjà observé sur la figure 3(a). Cependant, par rapport aux valeurs de M_I du cas de deux couches newtoniennes, les valeurs des rapports limites de densité M_I , où s'opère le basculement d'instabilités, sont plus faibles dans le cas où la couche inférieure devient non-newtonienne. Les longueurs d'onde modérées sont déstabilisées par les propriétés rhéofluidifiantes de la couche non-newtonienne. A l'inverse, les valeurs des rapports limites de densité M_I , sont plus élevées dans le cas où la couche supérieure est non-newtonienne et les instabilités de longueur d'onde modérée se trouvent stabilisées par la présence de cette couche de fluide non-newtonien. En comparaison au cas des deux couches newtoniennes, on constate également une atténuation des taux de croissance des instabilités de grandes longueurs d'onde dans les cas où l'un des fluides est rhéofluidifiant. Les résultats des effets rhéofluidifiants, présentés par l'évolution des seuils M_I en fonction des paramètres L_k et n_k de la loi de Carreau, sont regroupés suivant la position de la couche non-newtonienne, sur la figure 4(a) pour le cas où la couche supérieure est rhéofluidifiante et sur la figure 4(b) pour le cas contraire.

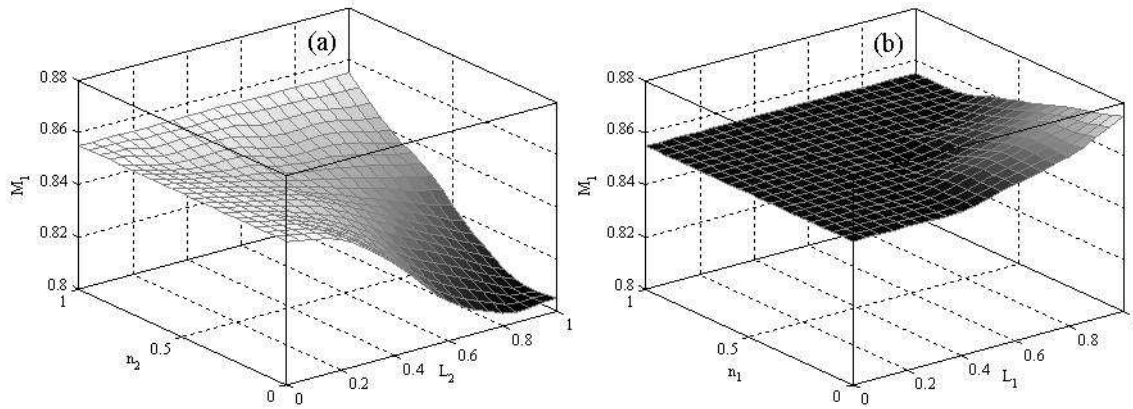


FIG. 4— Rapport limite de densité M_I avec
 (a) un fluide newtonien en haut et un fluide rhéofluidifiant en bas en fonction de L_2 et n_2
 (b) un fluide rhéofluidifiant en haut et un fluide newtonien en bas en fonction de L_1 et n_1
 pour $Re=12$, $E_I=\eta_{01}/\eta_{02}=2.5$, $Q_I=0.5$, $Ca_1=Ca_2=10^{10}$ et $\beta=0.2$.

On note d'après la figure 4(a) que dans le cas où la couche inférieure est un fluide de Carreau, le seuil de rapport de densité M_I diminue au fur et à mesure que les propriétés rhéofluidifiantes augmentent, soit que L_2 augmente et n_2 diminue. Notons que diminuer M_I , de manière à avoir une couche inférieure beaucoup plus dense que la couche supérieure, revient à stabiliser l'écoulement, alors qu'augmenter les propriétés rhéofluidifiantes des fluides conduit à la déstabilisation de l'écoulement. Il existe par conséquent une compétition entre les effets de ces différents paramètres. Par conséquent l'évolution constatée sur la figure 4(a) signifie que les perturbations de longueur d'onde modérée subissent un fort effet déstabilisant dû au comportement rhéofluidifiant de la couche du bas car elles peuvent croître dans des conditions favorisant généralement la stabilité des écoulements. Une évolution opposée et moins marquée est constatée sur la figure 4(b) quand la couche supérieure est un fluide de Carreau. Le fait qu'elle soit moins marquée s'explique simplement par le fait que le taux de cisaillement est moins fort dans la couche supérieure grâce à la présence de la surface libre, et donc, à paramètres L_k et n_k équivalents, la viscosité locale est moins influencée. Par ailleurs, dans cette configuration, on a noté que les deux longueurs d'onde sont stabilisées par rapport au cas de deux couches newtoniennes. L'effet stabilisant de la

diminution de M_I , ajouté à celui des propriétés rhéofluidifiantes de la couche supérieure, se conjuguent pour abaisser la limite de transition entre les longueurs d'onde. La forme de cette surface de transition nous permet donc de conclure que les instabilités de longueur d'onde modérée sont mieux stabilisées dans ce cas.

4 Conclusions

Ce travail est dédié à l'étude de la stabilité linéaire d'un écoulement de deux films superposés s'écoulant sur un plan incliné. Nous avons montré l'effet des paramètres de la loi de Carreau sur les instabilités connues pour se développer sans inertie dans le cas d'une couche inférieure moins visqueuse. Ces instabilités interfaciales se présentent sous forme de deux longueurs d'onde instables dont une seule devrait se développer, celle ayant le taux de croissance le plus fort. Il existe une valeur limite en termes de rapport de densité M_I entre ces deux instabilités. En dessous de cette valeur limite on montre que les instabilités qui croissent ont une grande longueur d'onde, par opposition à celles de longueur d'onde modérée, rencontrées au-delà de la valeur limite. Cette valeur limite M_I de basculement est suivie en faisant varier les paramètres rhéologiques L_k et n_k de l'un des deux fluides. Il est montré que la valeur M_I de transition est influencée par ces paramètres de façon différente selon que le fluide de Carreau se situe dans la couche inférieure ou supérieure. Dans le premier cas, les longueurs d'onde modérées sont déstabilisées, et la limite de basculement est abaissée, élargissant ainsi les zones de prédominance des instabilités de longueur d'onde modérée. Par contre, quand le fluide de type Carreau est celui en contact avec l'air, les instabilités de longueur d'onde modérée sont stabilisées par rapport au cas newtonien. Ces instabilités ne sont observées qu'à partir de plus grandes valeurs de M_I . On montre également qu'il existe un point commun entre les deux configurations étudiées car dans les deux cas on observe une stabilisation des modes de grande longueur d'onde.

Références

- Balmforth, N. J., Craster, R. V. & Toniolo, C. 2003 Interfacial instability in non-Newtonian fluid layers. *Phys. Fluids* **15**(11), 3370-3384.
- Benjamin, T. B. 1957 Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **2**, 554-573.
- Carreau, P. J., Kee, D. D. & Daroux, M. 1979 An Analysis of the Viscous Behavior of Polymeric Solutions. *Can. J. Chem. Eng.* **57**, 135-141.
- Chen, K. 1993 Wave formation in the gravity-driven low-Reynolds number flow of two liquid films down an inclined plane. *Phys. Fluids A* **5**(12), 3038-3048.
- Chen, K. P. 1995 Interfacial instability in stratified shear flows involving multiple viscous and visco-elastic fluids. *Appl. Mech. Rev.* **48**, 763-776.
- Hooper, A. P. & Boyd, W. G. C. 1987 Shear-flow instability due to a wall and a viscosity discontinuity at the interface. *J. Fluid Mech.* **179**, 201-225.
- Hu, J., Millet, S., Botton, V., BenHadid, H. & Henri, D. 2006 Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification. *Phys Fluids* **18**(10), 104101.
- Jiang, W. Y., Helenbrook, B. & Lin, S. P. 2004 Inertialess instability of a two-layer liquid film flow. *Phys. Fluids* **16**(3), 652-663.
- Loewenherz, D. S. & Lawrence, C. J. 1989 The effect of viscosity stratification on the stability of a free surface flow at low Reynolds number. *Phys. Fluids A* **1**(10), 1686-1693.
- Rousset, F., Millet, S., Botton, V. & BenHadid, H. 2007 Temporal Stability of Carreau Fluid Flow down an Incline. *J. Fluid Eng.* (In press).
- Weinstein, S. J. 1990 Wave-Propagation in the Flow of Shear-Thinning Fluids Down an Incline. *AIChE J.* **36**(12), 1873-1889.
- Yih, C.-S. 1967 Instability due to viscosity stratification. *J. Fluid Mech.* **27**, 337-352.
- Yih, C.-S. 1963 Stability of Liquid Flow down an Inclined Plane. *Phys. Fluids* **6**(3), 321-334.